УДК 681.5

А. С. КУЦЕНКО, В. И. ТОВАЖНЯНСКИЙ

ИНВЕРТИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СРЕДЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Методы обращения динамических систем нашли широкое распространение для решения задач управления механическими и электрическими системами. Инвертирование динамических систем является эффективным способом реализации процессов управления по возмущению, а также в комбинированных системах управления с прогнозирующей моделью. При решении задач обращения возникает ряд трудностей, связанных с высокой чувствительностью результатов по отношению к точности задания параметров математической модели объекта, неустойчивостью при управлении неминимально-фазовыми объектами, нарушении условий физической реализуемости.

В работе предлагается приближенный метод решения задачи обращения линейных стационарных динамических систем во многом свободный от указанных недостатков. Рассматриваются математические модели линейных динамических систем в форме «вход–выход», удовлетворяющие требованиям асимптотической устойчивости, а также условию равенства размерностей векторов входа и выхода. В основе метода лежит представление входных и выходных сигналов их приближениями в линейном пространстве квазигармонических функций времени. Особенностью предложенного метода обращения динамических систем является представление многомерных многочленов в виде произведения прямоугольных матриц на вектор степеней времени. Такое представление позволило свести большинство постановок задач обращения к решению линейных систем матричных алгебраических уравнений.

Компьютерная реализация, предложенного подхода к обращению линейной системы, разработана для «квадратных» линейных скалярных систем в условиях квазигармонических сигналов и содержит блоки аппроксимации задания по выходу, формирования матриц линейных систем и правых частей линейных алгебраических уравнений, оценку числа обусловленности решения линейной системы и блок сравнения результата обращения с заданием на основе непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений математической модели.

Ключевые слова: динамические системы, математические модели, обращение задачи управления, квазигармонические функции, матричные уравнения, аппроксимация.

О. С. КУЦЕНКО, В. І. ТОВАЖНЯНСЬКИЙ

ІНВЕРТУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ В СЕРЕДОВИЩІ КВАЗІГАРМОНІЙНИХ СИГНАЛІВ

Методи обернення динамічних систем знайшли широке розповсюдження для вирішення задач управління механічними і електричними системами. Інвертування динамічних систем є ефективним способом реалізації процесів управління з обуренню, а також в комбінованих системах управління з прогнозуючою моделлю. При вирішенні задач обернення виникає ряд труднощів, пов’язаних з високою чутливістю результатів по відношенню до точності завдання параметрів математичної моделі об’єкта, нестійкістю при управлінні немінімально-фазовими об’єктами, порушенням умов фізичної можливості бути реалізованими.

У роботі пропонується наближений метод розв’язання задачі обернення лінійних стаціонарних динамічних систем багато в чому вільний від зазначених недоліків. Розглядаються математичні моделі лінійних динамічних систем у формі «вхід–вихід», які задовольняють вимогам асимптотичної стійкості, а також умові рівності розмірностей векторів входу і виходу. В основі методу лежить заміна вхідних і вихідних сигналів їх наближеннями в лінійному просторі квазігармонійних функцій часу. Особливістю запропонованого методу обернення динамічних систем є уявлення багатовимірних многочленів у вигляді добутку прямокутних матриць на вектор ступенів часу. Таке уявлення дозволило звести більшість постановок задач обернення до вирішення лінійних систем матричних алгебраїчних рівнянь.

Комп’ютерна реалізація, запропонованого підходу до обернення лінійної системи, розроблена для «квадратних» лінійних скалярних систем в умовах квазігармонійних сигналів і містить блоки апроксимації завдання по виходу, формування матриць лінійних систем і правих частин лінійних алгебраїчних рівнянь, оцінку числа обумовленості рішення лінійної системи і блок порівняння результату обернення із завданням на основі безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь математичної моделі.

Ключові слова: динамічні системи, математичні моделі, обернення завдання управління, квазігармонічні функції, матричні рівняння, апроксимація.

O. S. KUTSENKO, V. I. TOVAZHNYANSKI

INVERSION OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS UNDER CONDITIONS OF QUASIHARMONIC SIGNALS

The methods of inversion of dynamical systems are widely used for solving the problems of controlling mechanical and electrical systems. The inverting of dynamic systems is an effective way of implementing processes of control according to disturbance, as well as in combined control systems with a predictive model. In solving the problems of inversion, there are number of difficulties related to the high sensitivity of the results in relation to accuracy of specifying the parameters of a mathematical model of an object, the instability in the control of non-minimal-phase objects, and the violation of physical feasibility conditions.

The paper suggests an approximate method for solving the inversion problem for linear stationary dynamical systems that is largely free of the indicated disadvantages. The method is based on the representation of input and output signals by their approximations in the linear space of quasiharmonic functions of time. Consider mathematical models of linear dynamical systems in the form "input–output". The systems under consideration must satisfy the requirements of asymptotic stability, and also the condition of equality of dimension of the input and output vectors. A feature of the proposed method of inversion of dynamical systems is the representation of multidimensional polynomials, approximating input and output signals, in the form of a product of rectangular matrices and a vector of power of time. Such a representation allowed reducing most of the statements of inversion problems to the solution of linear systems of matrix algebraic equations.

The computer implementation of the proposed approach to the inverting of the linear system is developed for "square" linear scalar systems in conditions of polynomial signal and contains blocks of approximation of the output assignment; the formation of matrices of linear systems and right-hand sides of linear algebraic equations; estimation of the condition number of the solution of the linear system and the block of comparison the result of the inversion with the assignment based on the direct integration of the differential equations of the mathematical model.

Keywords: dynamical systems, mathematical model, invers problems, quasiharmonic functions, matrix equations, approximation.

Введение. Проблема обращения динамических систем имеет обширную библиографию и давнюю предысторию. Основополагающими работами в этом направлении можно считать [1, 2], в которых обоснованы критерии и методы построения обратных операторов. Значительный вклад в развитие теории и практики инверсии динамических систем сделан в работах [3–5]. В них предложены новые критерии обратимости линейных динамических систем и даны конкретные пути решения задачи обращения. Ряд практических результатов решения задач инвертирования применительно к электрическим и механическим системам приведен в работах [6, 7].

Особенное значение проблема обращения приобретает в связи с решением задачи синтеза комбинированных систем автоматического управления. Различные аспекты проблемы обращения для комбинированных систем управления в наиболее общей постановке представлены в [4]. Несмотря на значительный прогресс в решении проблемы инверсии динамических систем на практике имеет место ряд трудностей, связанных с высокой чувствительностью результатов к точности параметров математической модели объекта управления, неустойчивостью при управлении неминимально-фазовыми объектами, нарушению условий физической реализуемости обратных операторов [4, 8, 9]. Перечисленные проблемы не позволяют в общем случае найти практически реализуемое решение задачи нахождения обратного оператора в задаче управления. Тем не менее, для решения ряда практических задач представляется естественным рассмотреть приближенные математические модели объекта управления и сигналов на его входах и выходах, для которых задача обращения имеет корректное решение. В комбинированных системах управления указанные допущения компенсируются контуром управления по отклонению.

Таким образом, целью настоящей работы является разработка приближенного, практически реализуемого численного метода решения задачи обращения для линейных динамических систем.

Постановка задачи исследования. Будем рассматривать линейные стационарные динамические системы, математические модели которых представлены в форме «вход – выход»

$$\sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{y}^{(p-k)} = \sum_{k=0}^{q} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{u}^{(q-k)}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{u} \in R^m$ – вектор управления;
$\boldsymbol{y} \in R^s$ – вектор выхода;
$\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_p$ – $(s \times s)$ матрицы;
$\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_q$ – $(s \times m)$ матрицы.

В дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемая управляемая система асимптотически устойчива, а размерности вектора управления и вектора выхода совпадают т.е. $(s = m)$.

Рассмотрим линейное пространство Ф непрерывных дифференцируемых функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \in \Phi. \qquad (2)$$

К таким D-функциям можно отнести класс квазигармонических функций вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{R}_k(t) \sin \omega_k t + \boldsymbol{Q}_k(t) \cos \omega_k t, \qquad (3)$$

где ω_k – некоторые постоянные, а $\boldsymbol{R}_k(t)$ и $\boldsymbol{Q}_k(t)$ – векторные многочлены степени не более l. Нетрудно простой проверкой убедиться, что функция $\varphi(t)$ вида (3) удовлетворяет условию (2).

Докажем следующее утверждение: если входное воздействие $\boldsymbol{u}(t)$ является D-функцией класса Ф, то и вынужденная реакция динамической системы (1) также D-функция класса Ф.

Для доказательства утверждения будем искать решение уравнения (1) в виде бесконечного ряда

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k)}(t), \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{C}_k$ – некоторые $m \times n$ матрицы, подлежащие определению.

После подстановки (4) в (1) получим

$$\sum_{j=0}^{p} \boldsymbol{A}_j \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{u}^{(k+p-j)} = \sum_{j=0}^{q} \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{u}^{(q-j)}. \qquad (5)$$

Приравнивая матричные коэффициенты при производных $\boldsymbol{u}^{(j)}$ одного порядка в левой и правой частях (5), получим систему матричных уравнений для вычисления матриц $\boldsymbol{C}_k$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{j} \boldsymbol{A}_{p-j+i} \boldsymbol{C}_i = \boldsymbol{B}_{i-j}, \ \ j = \overline{0, p}, \\ \sum_{i=0}^{p} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{C}_{i+k} = \boldsymbol{0}, \ \ k = 1, 2, \dots \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) имеет треугольную структуру относительно искомых матриц $\boldsymbol{C}_k$ и решается последовательным нахождением матриц $\boldsymbol{C}_k$ начиная с $\boldsymbol{C}_0$.

Таким образом, представление выходной реакции динамической системы (1) при нулевых начальных условиях в виде (4) является корректным, а поскольку все $\boldsymbol{u}^{(k)}(t)$ принадлежат классу Ф, то и их линейное преобразование $\boldsymbol{y}(t)$ также является элементом Ф, т.е. утверждение доказано.

В рамках приведенных допущений относительно структур динамической системы и сигналов на входах и выходах постановка задачи обращения может быть сформулирована следующим образом: найти входное воздействие $\boldsymbol{u}(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$, принадлежащее некоторому классу Ф D-функций, при котором выход

$\boldsymbol{y}(t)$ системы (1) при нулевых начальных условиях будет заданной D-функцией того же класса Φ.

Решение задачи инвертирования. Пусть входы и выходы динамической системы (1) принадлежат классу квазигармонических функций (3).

Воспользовавшись матрично-векторным представлением полиномов [10] соотношение (3) можно записать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{N} (\boldsymbol{R}_k \sin \omega_k t + \boldsymbol{Q}_k \cos \omega_k t)\boldsymbol{T}, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{R}_k$ и $\boldsymbol{Q}_k$ – матрицы, строки которых соответствуют коэффициентам компонент векторных полиномов в (3), а $\boldsymbol{T} = \left(1, t, \frac{t^2}{2}, \dots \frac{t^l}{l!}\right)^T$ – $(l+1)$-мерный вектор-столбец.

Для нахождения производных функции (7) рассмотрим одночастотную функцию вида (7)

$$\varphi(t) = (\boldsymbol{R} \sin \omega t + \boldsymbol{Q} \cos \omega t)\boldsymbol{T}. \quad (8)$$

Последовательность производных функции (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} &= [(\boldsymbol{R}\Lambda - \boldsymbol{Q}\omega) \sin \omega t \\
&\quad + (\boldsymbol{A}\omega + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda} \cos \omega t)]\boldsymbol{T}, \\
\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= [(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}^2 - 2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\omega - \boldsymbol{R}\omega^2) \sin \omega t \\
&\quad + (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}^2 + 2\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\omega \\
&\quad - \boldsymbol{Q}\omega^2) \cos \omega t]\boldsymbol{T}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{d^k\varphi}{dt^k} &= (\boldsymbol{R}^k \sin \omega t + \boldsymbol{Q}^k \cos \omega t)\boldsymbol{T}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned} \quad (9)$$

где матрицы $\boldsymbol{R}_k$ и $\boldsymbol{Q}_k$ вычисляются по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^k &= \boldsymbol{R}^{k-1}\boldsymbol{\Lambda} - \boldsymbol{Q}^{k-1}\omega, \\
\boldsymbol{Q}^k &= \boldsymbol{Q}^{k-1}\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{R}^{k-1}\omega, \\
\boldsymbol{R}^0 &= \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{Q}^0 = \boldsymbol{Q}.
\end{aligned} \quad (10)$$

Матрица $\boldsymbol{\Lambda}$ имеет размерность$(l+1) \times (l+1)$, а ее элементы находятся в виде

$$\lambda_{ij} = \delta_{i,j+1},\ \ i, j = \overline{1, l+1}.$$

Рекуррентное соотношение (10) можно представить в матричной форме

$$(\boldsymbol{R}^k \vdots \ \ \boldsymbol{Q}^k) = (\boldsymbol{R}^{k-1} \vdots \ \ \boldsymbol{Q}^{k-1})\boldsymbol{\Omega}, \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\Omega} - 2(l+1) \times 2(l+1)$ – блочная матрица

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \omega\mathbf{E} \\ -\omega\mathbf{E} & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

На основании соотношений (11) и (12) последовательность матриц полиномиальных коэффициентов производных одночастотной функции (7) можно записать в виде

$$(\boldsymbol{R}^k \vdots \ \ \boldsymbol{Q}^k) = (\boldsymbol{R} \vdots \ \ \boldsymbol{Q})\boldsymbol{\Omega}^k, \quad (13)$$

где матрица $\boldsymbol{\Omega}^k$ вычисляется последовательным возведением в степень матрицы (12).

Пусть матричное представление входных и выходных сигналов имеет вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t) &= (\boldsymbol{R}_u \sin \omega t + \boldsymbol{Q}_u \cos \omega t)\boldsymbol{T}, \\
\boldsymbol{y}(t) &= (\boldsymbol{R}_y \sin \omega t + \boldsymbol{Q}_y \cos \omega t)\boldsymbol{T},
\end{aligned} \quad (14)$$

где $\boldsymbol{R}_u$, $\boldsymbol{Q}_u$, $\boldsymbol{R}_y$, $\boldsymbol{Q}_y$ – $q \times (l+1)$-мерные матрицы коэффициентов полиномиальных множителей.

Тогда производные от этих сигналов в соответствии с (9) можно представить как

$$\begin{aligned}
\frac{d^k\boldsymbol{u}}{dt^k} &= (\boldsymbol{R}_u^k \sin \omega t + \boldsymbol{Q}_u^k \cos \omega t)\boldsymbol{T}, \\
\frac{d^k\boldsymbol{y}}{dt^k} &= (\boldsymbol{R}_y^k \sin \omega t + \boldsymbol{Q}_y^k \cos \omega t)\boldsymbol{T},
\end{aligned} \quad (15)$$

где матричные коэффициенты $\boldsymbol{R}_u^k$, $\boldsymbol{Q}_u^k$, $\boldsymbol{R}_y^k$, $\boldsymbol{Q}_y^k$ находятся в соответствии с формулой (13).

После подстановки (14), (15) и (13) в (1) и сокращения на $\boldsymbol{T}$ получим

$$\sum_{k=0}^{p} \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Omega}^{p-k} = \sum_{k=0}^{q} \boldsymbol{B}_k \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Omega}^{q-k}, \quad (16)$$

где $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{R}_y \vdots \ \ \boldsymbol{Q}_y)$ и $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{R}_u \vdots \ \ \boldsymbol{Q}_u)$ – матричное представление полиномиальных множителей перед функциями $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ для выходных и входных сигналов.

Полученное матричное отображение (16) симметрично и позволяет находить решение как прямой, так и обратной задач управления путем векторизации матриц $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{U}$ и построений на основе кронекеровского произведения матриц [11].

Полученный результат легко распространяется на скалярные системы. В этом случае матрицы $\boldsymbol{A}_k$ и $\boldsymbol{B}_k$ представляют собой скаляры a_k и b_k соответственно и матричное уравнение (14) приобретет вид

$$\boldsymbol{Y} \sum_{k=0}^{p} a_k \boldsymbol{\Omega}^{p-k} = \boldsymbol{U} \sum_{k=0}^{q} b_k \boldsymbol{\Omega}^{q-k}, \quad (17)$$

решение которого относительно векторов $\boldsymbol{Y}$ или $\boldsymbol{U}$ (для задачи обращения) сводится к процедуре обращения матриц $\sum_{k=0}^{p} a_k \boldsymbol{\Omega}^{p-k}$ или $\sum_{k=0}^{q} b_k \boldsymbol{\Omega}^{q-k}$ размерности $2(l+1) \times 2(l+1)$.

Программный комплекс для решения задач обращения. Программное обеспечение в полном объеме разработано применительно к скалярным системам и содержит следующие основные структурные блоки.

1. Блок ввода исходной информации – коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_q$.

2. Блок формирования задания, включающий случайный или с фиксированным шагом выбор N значений требуемой функции выхода $y^*(t)$ на

фиксированном временном интервале, а также задание степени l аппроксимирующих полиномов и частот ω_k и вычисление коэффициентов полиномов на основе метода наименьших квадратов. Предусмотрена аппроксимация полиномов кубическими сплайнами.

3. Блок формирования матрицы системы линейных уравнений (17) и вычисление числа обусловленности (cond) систем линейных уравнений на основе евклидовой нормы [12]. Если $\mathrm{cond} \leq 100$, то следует решение системы (17). В противном случае степень аппроксимирующих полиномов l увеличивается на единицу.

4. Правильность решения задачи обращения контролируется путем численного интегрирования исходных систем дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях и сравнения результата интегрирования $y(t)$ с соответствующими значениями исходной функции выхода $y^*(t)$.

Выводы. В работе рассмотрены упрощенные математические модели сигналов на основе гармонических функций с полиномиально изменяющейся амплитудой.

Матричное представление полиномиальных амплитуд позволило представить управляемые динамические процессы как статические линейные преобразования в пространстве прямоугольных матриц. Получены достаточно простые и эффективные алгоритмы численного решения задачи инверсии, а также метод оценки степени робастности результатов.

Список литературы

1. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14., № 2. P. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14., № 3. P. 270–276.
3. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. *Методы робастного обращения динамических систем*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 219 с .
4. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. *Системы управления с динамическими моделями*. Х.: Основа, 1996. 212 с.
5. Борухов В. Т. Критерии обратимости линейных стационарных многомерных систем. *Автоматика и телемеханика*. 1978. Вып. 11. С. 5–11.
6. Пухов Г. Е., Жук К. Д. *Синтез многосвязных систем управления по методу обратных операторов*. К.: Наукова думка, 1966. 218 с.
7. Крутько П. Д. *Обратные задачи динамических управляемых систем. Линейные модели.* М.: Наука, 1987. 304 с.
8. Гудвин Г. К., Граббе С. Ф., Сальгадо М. Э. *Проектирование систем управления*. М.: БИНОМ, 2014. 911 с.
9. Trentelman H., Stoorvogel A., Hautus M. *Control Theory for Linear Systems*. Springer, 2001. 389 p. URI: http://www.math.rug.nl/trentelman/psfiles/book_2005.pdf. (дата обращения: 05.05.2018).
10. Куценко А. С., Товажнянский В. И., Одарченко Н. А. Обращение линейных динамических систем в классе полиномиальных сигналов. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології.* Харків: НТУ «ХПІ», 2017. № 28 (1250). С. 19–22.
11. Ланкастер П. *Теория матриц*. М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства наука, 1978. 280 с.
12. Форсайт Дж., Моллер К. *Численное решение систем линейных алгебраических уравнений*. М.: Мир, 1969. 167 с.

References (transliterated)

1. Sain M. K., Massey J. L. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14., no. 2, pp. 141–149.
2. Silverman L. M. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control*. 1969. Vol. AS-14, no. 3, pp. 270–276.
3. Il'in A. V., Korovin S. K., Fomichev V. V. *Metody robastnogo obrashcheniya dinamicheskikh sistem* [Methods of robust inversion of dynamical systems]. Moskow, FIZMATLIT Publ., 2009. 219 p.
4. Kostenko Yu. T., Lyubchik L. M. *Systemy upravleniya s dinamicheskimi modelyami* [Methods of robust inversion of dynamical systems]. Kharkiv, Osnova Publ., 1996. 212 p.
5. Borukhov V. T. *Kriterii obratimosti lineynykh statsionarnykh mnogomernykh sistem* [Criteria for the reversibility of linear stationary multidimensional systems]. Avtomatika i telemechanika [Automation and telemechanics], 1978, no.2, pp. 5–11.
6. Puhov G. E., Zhuk K. D. *Sintez mnogosvyaznykh system upravleniya po metodu obratnykh operatorov* [Synthesis of multiply connected control systems by the method of inverse operators]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1996. 218 p.
7. Krut’ko P. D. *Obratnyye zadachi dinamicheskikh upravlyayemykh sistem. Lineynyye modeli* [Inverse problems of dynamical control systems. Linear models]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p.
8. Goodwin G. C., Graebe S. F., Salgado M. E. *Proyektirovaniye sistem upravleniya* [Design of control systems]. Moscow, Binom Publ., 2004. 911 p
9. Trentelman H., Stoorvogel A., Hautus M. *Control Theory for Linear Systems*. Springer, 2001. 389 p. Available at: http://www.math.rug.nl/trentelman/psfiles/book_2005.pdf (accessed 05.05.2018).
10. Kutsenko A. S., Tovazhnyanskiy V. I., Odarchenko N. A. Obrashcheniye lineynykh dinamicheskikh sistem v klasse polinomial'nykh signalov [Inversion of linear dynamical systems in the polynomial signals class]. *Visnyk Nacional'nogo tehnichnogo universytetu «HPI». Serija: Systemnyj analiz, upravlinnja ta informacijni tehnologii'* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: System analysis, control and information technology]. Kharkív, NTU "KhPI" Publ., 2017. № 28 (1250), pp. 19–22.
11. Lankaster P. *Teoriya matrits* [Matrix Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 280 p.
12. Forsayt D., Moller K. *Chislennoye resheniye sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy*. [Computer solution of linear algebraic systems]. Moscow, Mir Publ., 1969. 167 p.

Поступила (received) 12.05.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Куценко Олександр Сергійович (***Куценко Александр Сергеевич***, ***Kutsenko Oleksandr Sergijovych***) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу та інформаційно-аналітичних технологій Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6059-3694; e-mail: kuzenko@i.ua

Товажнянський Володимир Ігорович (***Товажнянский Владимир Игоревич***, ***Tovazhnyanskiy Vladimir Igorevych***) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0713-3514; e-mail: vtovazhnianskyi@gmail.com